EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

42e JAARGANG 1966/1967

X — 15 JULI 1967

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE OVERTUIGINGSKRACHT VAN HET BEWIJS IN DE WISKUNDE

door

Drs. J. NIENHUIS

Amsterdam

In een artikel over de bewijskracht heeft de heer Vredenduin aan het slot (blz. 41) formeel concluderen en natuurlijk denken onderscheiden. Met de slotopmerking waarin het beperkte nut van het formele t.a.v. het intuïtieve voor de leerling werd beklemtoond ben ik het eens. Niettegenstaande lijkt het mij toch juist te pleiten voor schoolonderricht in het formaliseren (de formele logica biedt daarvoor niet altijd het geschiktste lesmateriaal).

Typerend voor schoolbewijzen in de exacte vakken is dat nu eens een beroep op formele regels dan weer op intuïtieve inzichten gedaan wordt. Bijvoorbeeld $8 \cos^4 a = \cos 4a + 4 \cos 2a + 3$ vraagt om een afleiding zoals die o.a. in de de symbolische logica voorkomen, bij $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ speelt de aanschouwing van een plaatje een hoofdrol. Een gemis aan feeling voor het noodzakelijk switchen van het formele op het intuïtieve zou wel eens de oorzaak kunnen zijn dat voor sommige leerlingen, waarvan men het juist niet zou verwachten (sterke schakers), de wiskunde onbegrijpelijk blijft. Een dergelijk gemis aan besef kan m.i. door speciale aandacht aan het formaliseren en wat daarmee samenhangt worden verkleind. Ik vermoed zelfs dat hierin de kern van de onderwijsvernieuwing voor de beta-vakken is te vinden. In ieder geval beantwoordt speciale aandacht aan het onderscheid tussen het formele en het aanschouwelijke (het hand- resp. denkwerk) in de wiskunde aan een behoefte van deze tijd. Immers de vraag in hoeverre bijv. de wiskunderesultaten louter computerwerk kunnen zijn, komt nu niet slechts in een enkel professoraal brein op, maar is een probleem dat een leerling ook al iets zegt.

Op datgene wat de juistheid van een formele afleiding garandeert zullen (en hoeven) we niet nader in te gaan. Praktisch levert het vaststellen van juistheid d.w.z. van overeenstemming met de regels van een systeem (of spel) geen discussie op. Een matvoering op het schaakbord overtuigt en wel even onvoorwaardelijk als een formele afleiding in de Boole-calculus.

Ook zal in het algemeen een (intuïtief) bewijs voor de leerlingen direct overtuigend zijn; een bewijs waarmee de waarheid d.w.z. de

toepasselijkheid van een bewering over de al dan niet geïdealiseerde werkelijkheid wordt vastgesteld (bijv. concurrentie van zwaartelijnen). Vaak verloopt echter het zich gewonnen geven aan een bewijs toch te voorbarig, omdat de leerling zich te gemakkelijk laat overtuigen door formele aspecten (met overigens goede reputatie) die niet meer ad hoc worden doordacht.

Algemeen beschouwd is mijn standpunt hierbij, dat inzicht zich los van een taal kan ontwikkelen en zeer waarschijnlijk los ervan ontstaat. In vele gevallen kan de taal zelfs hinderlijk zijn voor dit ontstaan (metafysica in de slechte zin van het woord). Daarentegen is de taal vrijwel onmisbaar voor het onthouden en overdragen van inzicht. Zonder veel hoop, dat daardoor mijn beschouwing gefundeerder wordt dan het aangehaalde artikel, geef ik hier toch maar een nadere bepaling van wat slaat op natuurlijk denken, intuïtie, aanschouwing of inzicht. M.i. betreft het hier het vermogen van de mens (of het dier) zijn gedrag doeltreffend aan te passen aan nieuwe situaties op grond van (zijn) ervaring.

In het volgende zullen we het voorgaande ten dele toelichten en wel met die gevallen die in de schoolpraktijk aan de orde kunnen komen, waarbij tevens argumenten worden geschetst ter ondersteuning van mijn algemeen standpunt. Het gaat hier om een keuze uit vele meer of minder interessante voorbeelden.

De gebruikelijke formulering van de bewijsvoering met volledige inductie bevat taalgemanierdheden die verwarring kunnen veroorzaken, wanneer men de overtuigingskracht daar te veel van laat afhangen. Een voorbeeld levert het bekende zwendelbewijs voor de bewering dat alle mensen even oud zijn. Opvallend was dat de leerling die het beste op de hoogte was met de bewijsmethode het langst overdonderd bleef.

Leeft er slechts één mens dan gaat de bewering op. We nemen aan dat voor iedere groep van n mensen geldt dat ze even oud zijn (inductie-onderstelling). We tonen nu aan, dat hetzelfde zal gelden voor elke groep van $(n + 1)$ personen. Ga uit van een groep van $(n + 1)$ personen. Zonder persoon A hieruit af, de overblijvende n waaronder B zijn allen even oud (ondersteld). Laat A de plaats van B innemen en omgekeerd, hieruit volgt dat A even oud is als zijn $(n - 1)$ groepsgenoten en dus even oud als B, dus allen in de groep van $n + 1$ zijn even oud! De stap van n op $n + 1$ is gelukt en de bewering is juist voor $n = 1$, dus alle mensen zijn even oud!!

Al moge de fout hier niet moeilijk te vinden zijn, dat neemt niet weg dat de vraag blijft welke voorzorgsmaatregelen genomen zouden moeten worden om dergelijke ontsporingen te voorkomen. Mijn over-

tuiging is dat daarvoor geen regels te geven zijn, maar dat slechts de persoonlijke ervaring met het onderwerp van onderzoek de enige garantie biedt voor een toepasselijk inzicht. Dit valt duidelijk op t.a.v. de redeneringen van Zeno (bijv. t.a.v. Achilles en de schildpad).

Een bekend bittertafelprobleem verloopt als volgt: „Hoeveel haar kan een mens maximaal op zijn hoofd hebben?" „Een miljoen." „Goed, dan beweer ik dat er in Nederland minstens twee mensen zijn met precies hetzelfde aantal hoofdharen." De ondervraagde doorziet de situatie al gauw, indien men opmerkt dat het er om gaat tien miljoen (of meer) knikkers in een miljoen doosjes onder te brengen.

Ik meen dat noch de geschoolde noch de onontwikkelde mens het inzicht verwerft op grond van een keurig uitgevoerd schoolbewijs bijv. met volledige inductie; zelfs niet via de kernpunten erin zoals het overzien van de toestand met één doosje (en meer knikkers) als wel het doordenken (via een reductio ad absurdum) van de stap van n op $n + 1$. Het inzicht dat het beweerde waar is vloeit voort uit de confrontatie met onze directe of herinnerde ervaring. De betoogtrant bij de volledige inductie valt niet met het onderhavige denkproces samen en is er ook geen weerspiegeling van; het ordent wellicht de associaties en maakt het mogelijk om sneller vast te stellen of men het met anderen over hetzelfde eens is.

Een simpel probleem waarbij opvalt dat een voortborduren op de formele regelmatigheid in de uitdrukkingswijze de leerling tot conclusies verleidt die niet van toepassing zijn, levert het volgende.

Eén plat vlak verdeelt de ruimte in twee gescheiden gebieden. Twee snijdende platte vlakken in vier en drie elkaar snijdende vlakken in acht deelruimten. Menigeen zal geneigd zijn vier vlakken in staat te achten de ruimte maximaal in zestien gebieden te verdelen in plaats van vijftien. Men beseft niet dat bij het aanbrengen van het vierde vlak steeds één van de acht aanwezige ruimten niet verdeeld wordt. Het bewijs van de algemene formule voor n vlakken berust op het inzicht dat zich bij de gegeven aanpak geen onvoorziene toestanden kunnen voordoen zoals van drie op vier (voor de meeste leerlingen althans).

Niet alleen Cantor's beschouwingen die de overaftelbare verzamelingen introduceren, maar ook de gewone schoolpraktijk maakten mij wat sceptisch t.a.v. het nuttig effect van de reductio ad absurdum. Natuurlijk heeft het beroemde bewijs van Euclides (over de onbeperkte voorraad priemgetallen) ook mijn leerlingen aangesproken. Maar hun bewondering ervoor had verdacht veel weg van het soort dat men heeft voor goocheltrucs. Het overtuigende

kernpunt blijft toch het voorschrift aan de hand waarvan men een onbeperkt aantal priemgetallen kan gaan opbouwen; dit positieve aspect vind ik bij Euclides onnodig gemaskeerd, maar wellicht schuilt hierin nu juist zijn charme.

Een interessant reductio ad absurdum geval was het volgende. Gegeven zijn twee volkomen gelijke wijnglazen, het ene gevuld met witte, het andere met precies evenveel rode wijn. Uit het laatste wordt een lepeltje rode wijn genomen en in het andere glas overgeschonken, waarna geroerd wordt. Dan wordt eenzelfde hoeveelheid van het verkregen mengsel met hetzelfde lepeltje in het glas met rode wijn teruggeschonken. De vraag is nu, welke van de twee glazen na dit alles het meest verontreinigd is met wijn van de andere soort.

De redenering die zegt dat de verontreiniging in het ene glas niet meer kan zijn dan in het andere (dat dit absurd is), omdat uiteindelijk de glazen beide evenveel vloeistof bevatten, had verrassend weinig effect. Pas via opmerkingen waarop een positief bewijs berust, lukte het mij (dus achteraf) de leerlingen deze reductio ad absurdum te doen appreciëren.

Ook het voorleggen van een kernachtig positief bewijs (stel in het ene glas a cc wijn_1 en b cc wijn_2 dan b cc wijn_1 en a cc wijn_2 in het andere) garandeert niet het ogenblikkelijk intreden van een ,aha'. Maar om in zo'n geval aan te komen met aanvullende redeneringen gebaseerd op reductio ad absurdum betekent voor mij het paard achter de wagen spannen, tenminste met betrekking tot het niet geschoolde gezonde verstand.

Verwant hiermee is een ander bekend probleem; men gaat uit van een vierkant $ABCD$ met een punt P er binnen, zodanig dat in $\triangle PAB$ $\angle PAB = \angle PBA = 15°$. Gevraagd wordt te bewijzen, dat $\triangle PCD$ gelijkzijdig is. Mijn ervaring is dat de leerlingen de reductio ad absurdum (was $PC > BC$ dan hoeken rondom P samen minder dan 360°, $PC < BC$ dan meer dan 360°) wel appreciëren omdat de meetkunde hen meestal al eerder van een dergelijke bewijsvoering kennis heeft laten nemen. Het zelf opstellen van een dergelijke bewijsvoering lijkt mij een zeldzaamheid, zelfs onder meer geschoolden; een sterke neiging (en terecht) voor een positief bewijs domineert.

Tot slot zou ik willen opmerken, dat meer kennis van het formaliseren, meer besef van de positie die de computer in de wetenschap gaat innemen, een reëlere kijk zal kunnen geven op de fundamenten van de bewijskracht in de wiskunde; de onaantastbare geldigheid zal daardoor waarschijnlijk worden gerelativeerd.

DE NORMALE VERDELING VOOR n STOCHASTISCHE VARIABELEN

door

Drs. H. C. G. C. Balemans

Heer (L)

Tijdens de heroriënteringscursus statistiek werden allerlei begrippen en de eigenschappen daarvan voor één stochastisch variabele $\underline{x}$ gedefinieerd resp. afgeleid. Zeer waarschijnlijk is toen bij velen de vraag opgekomen of men begrippen als verwachtingswaarde, variantie e.d. ook kan definiëren voor meerdere stochastische variabelen en zo ja, welke eigenschappen daar dan voor gelden. In dit artikel wil ik bij wijze van voorbeeld laten zien, hoe men het begrip normale verdeling voor n stochastisch variabelen kan definiëren. Uitgangspunt is daarbij het geval van één stochastisch variabele.

Een stochastisch variabele $\underline{x}$ heeft een normale verdeling met parameters μ en σ (met $\sigma > 0$) als zijn verdelingsfunktie F de gedaante:

$$(1) \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

heeft. De kansdichtheidsfunktie f heeft dan de vorm:

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

De faktor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ is zó gekozen, dat F en f aan de definitie van resp. verdelingsfunktie en kansdichtheidsfunktie voldoen:
$F(x)$ is monotoon niet dalend en (in dit geval overal) continu en

$$(3) \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad \text{en} \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Als we met $E\underline{x}$ en $D^2\underline{x}$ resp. de verwachtingswaarde en de variantie van $\underline{x}$ aangeven dan geldt:

$$(4) \qquad E\underline{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mu$$

en

$$(5)\quad D^2\underline{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sigma^2.$$

Wanneer we n stochastische variabelen $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ hebben, dan ligt het enigszins voor de hand om deze te beschouwen als coördinaten van een vektor $\underline{x}$, die we dan een stochastische vektor kunnen noemen.
De cumulatieve verdelingsfunktie F van deze vektor kunnen we als volgt definiëren:

$$(6)\qquad F(x) = F(x_1, \ldots, x_n) = P(\underline{x}_1 \leqq x_1, \ldots, \underline{x}_n \leqq x_n)$$

voor iedere verzameling van reële getallen $x_1, \ldots, x_n$.
Als nu voor F geldt, dat de n^e partiële afgeleide:

$$(7)\qquad \frac{\delta^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\delta x_1 \ldots \delta x_n} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

bestaat en:

$$(8)\qquad F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \ldots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, \ldots, t_n)dt_n \ldots dt_1$$

is, dan noemen we de niet-negatieve funktie $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ de kansdichtheidsfunktie van $\underline{x}$.
Om tot een definitie van verwachtingswaarde van $\underline{x}$ te komen gebruiken we de volgende definities:

Definitie 1:

Onder een stochastische matrix $\underline{A}$ verstaan we de matrix $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})$ $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ van stochastisch variabelen $\underline{a}_{ij}$.

Definitie 2:

Onder de verwachtingswaarde van een stochastische matrix $\underline{A}$ verstaan we de matrix:

$$(9)\qquad E(\underline{A}) = (E\underline{a}_{ij})\ i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n.$$

(Om de overeenkomst van deze laatste definitie met het geval van één stochastisch variabele te demonstreren, het volgende.
Stel dat de stochastisch variabelen $\underline{a}_{ij}$ discreet verdeeld zijn; dit geeft aanleiding tot een eindig aantal matrices $A_1, \ldots, A_q$. Laat de waarschijnlijkheid van A_k gelijk zijn aan p_k.
Dan is $E(\underline{A}) = \sum_{k=1}^{q} A_k p_k = (E\underline{a}_{ij})$. In het geval van een continue verdeling kan men tot een dergelijk resultaat komen, maar daarop gaan we hier niet verder in.)

De stochastische vektor $\underline{x}$ kunnen we nu beschouwen als een stochastische matrix, die slechts uit één kolom bestaat. De verwachtingswaarde van $\underline{x}$ wordt dan:

(10) $$E\underline{x} = \begin{pmatrix} E\underline{x}_1 \\ \vdots \\ E\underline{x}_n \end{pmatrix}$$

Net als in het geval van één stochastisch variabele heeft ook hier de bewerking E bepaalde eigenschappen, die we kunnen samenvatten in de volgende stelling:

Stelling 1.

Als $\underline{A}$ een m bij n stochastische matrix is, D een reële l bij m matrix, F een reële n bij q matrix en H een reële l bij q matrix, dan is:

(11) $$E(D\underline{A}F + H) = D\,.\,E(\underline{A})\,.\,F + H.$$

Bewijs: Het element in de i-de rij en j-de kolom van

$$E(D\underline{A}F + H) \text{ is:}$$
$$E(\sum_{k,g} d_{ik}\, \underline{a}_{kg}\, f_{gj} + h_{ij}) =$$
$$\sum_{k,g} d_{ik}\, (E\underline{a}_{kg}) f_{gj} + h_{ij},$$

precies het element van de i-de rij en j-de kolom van $D\,.\,E(\underline{A})\,.\,F + H$.

De kansdichtheidsfunktie f van de normale verdeling van een n-dimensionale stochastische vektor $\underline{x}$ (waaruit door integratie ook de cumulatieve verdelingsfunktie F is te bepalen) definiëren we nu als volgt:

Definitie 3:

Onder de kansdichtheidsfunktie f van de normale verdeling met parameters b en A van een n-dimensionale stochastische vektor $\underline{x}$ verstaan we de funktie:

(12) $$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = K\,.\,e^{-\frac{1}{2}(x-b)^t A (x-b)}$$

Hierin is K (> 0) een constante, die zo wordt gekozen (zie onder), dat de integraal over de n-dimensionale Euclidische ruimte der $x_1, \ldots, x_n$ gelijk aan 1 wordt; b is een n-dimensionale reële vektor en A een definiet positieve en symmetrische n bij n matrix (definiet positief voor een matrix wil zeggen, dat $x^t A x > 0$ voor alle $x \neq 0$).

Met $(x - b)^t$ is bedoeld de getransponeerde (= rijvektor) van de (kolom)vektor $(x - b)$.
De overeenkomst met de kansdichtheidsfunktie voor $n = 1$ is gemakkelijk na te gaan.

We zullen nu nagaan of f een goede kansdichtheidsfunktie is, hoe K gekozen moet worden en welke de betekenis is van de parameters b en A.
Het is duidelijk, dat $f(x) \geqq 0$. Daar verder A definiet positief is geldt:

$$(13) \qquad (\underline{x} - b)^t A (\underline{x} - b) \geqq 0$$

en is f dus begrensd, d.w.z.

$$(14) \qquad 0 \leqq f(x) \leqq K \qquad \text{voor alle } x.$$

K moet nu zo bepaald worden, dat de integraal van $f(x)$ over de n-dimensionale ruimte gelijk wordt aan 1. Daartoe beschouwen we:

$$(15) \qquad K' = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-b)^t A (x-b)} \, dx_n \dots dx_1$$

en gebruiken we

Stelling 2:

Als de matrix A definiet positief is, dan is er een niet-singuliere matrix C zó dat

$$(16) \qquad C^t . A . C = I$$

waarin I de eenheidsmatrix is.
Het bewijs van deze stelling, die in de matrixtheorie thuishoort, laten we hier weg.
Stel nu

$$(17) \qquad \underline{x} - b = C\underline{y}$$

waarin $\underline{y}$ een n-dimensionale stochastische vektor

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \end{pmatrix}$$

is, dan is:

$$(18) \qquad (\underline{x} - b)^t A (\underline{x} - b) = \underline{y}^t C^t A C \underline{y} = \underline{y}^t \underline{y}.$$

De transformatie (17) is inverteerbaar, zodat we de cumulatieve

verdelingsfunktie $G(y)$ van $\underline{y}$ kunnen definiëren door:

(19) $$G(y) = F(x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n))$$

waarin $x_i(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_j + b_i$.
Voor de kansdichtheidsfunktie g vinden we dan:

(20) $$g(y) = g(y_1, \ldots, y_n) = \frac{\delta^n G(y_1, \ldots, y_n)}{\delta y_1 \ldots \delta y_n} = K \, . \, e^{-\frac{1}{2}y^t y} \, . \, J(y_1, \ldots, y_n$$

Hierin is

(21) $$J(y_1, \ldots, y_n) = mod \begin{vmatrix} \frac{\delta x_1}{\delta y_1} \ldots \frac{\delta x_1}{\delta y_n} \\ \vdots \;\; \ldots \;\; \vdots \\ \frac{\delta x_n}{\delta y_1} \ldots \frac{\delta x_n}{\delta y_n} \end{vmatrix} = mod \, |C|.$$

($J(y_1, \ldots, y_n)$ is de determinant van Jacobi en mod $|C|$ is de absolute waarde van de determinant van C).
(20) gaat dan over in:

(22) $$g(y) = g(y_1, \ldots, y_n) = K \, . \, \text{mod} \, |C| \, . \, e^{-\frac{1}{2}y^t y}$$

en (15) gaat over in:

(23) $$K' = \text{mod} \, |C| \, . \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^t y} \, dy_n \ldots dy_1$$

en daar:

(24) $$e^{-\frac{1}{2}y^t y} = e^{-\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}y_i^2}$$

kunnen we ook schrijven:

(25) $$\begin{aligned} K' &= \text{mod} \, |C| \, . \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \ldots e^{-\frac{1}{2}y_n^2} \, dy_n \ldots dy_1 \\ &= \text{mod} \, |C| \, . \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y_i^2} \, dy_i \right) \\ &= \text{mod} \, |C| \, . \prod_{i=1}^{n} (\sqrt{2\pi}) \qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}, \text{ zie (4)} \right) \\ &= \text{mod} \, |C| \, . \, (2\pi)^{\frac{1}{2}n} \end{aligned}$$

Uit (16) volgt nu

(26) $$|C^t| \, . \, |A| \, . \, |C| = |I|$$

en daar $|C^t| = |C|$ en $|I| = 1$ volgt hieruit

(27) $$\text{mod} \, |C| = \frac{1}{\sqrt{|A|}}$$

Voor K vinden we dan:

(28) $$K = \frac{1}{K'} = \sqrt{|A|} \,.\, (2\pi)^{-\frac{1}{2}n}$$

en dus voor de normale kansdichtheidsfunktie f

(29) $$f(x) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \,.\, e^{-\frac{1}{2}(x-b)^t A (x-b)}$$

Wat is nu de betekenis van b en A? In (17) stelden we

(30) $$\underline{x} - b = C\underline{y} \quad \text{of} \quad \underline{x} = C\underline{y} + b.$$

Voor de verwachtingswaarde van $\underline{x}$ vinden we dan volgens stelling 1:

(31) $$E\underline{x} = C \,.\, E\underline{y} + b.$$

De kansdichtheidsfunktie g van $\underline{y}$ was (zie (22))

(32) $$g(y) = g(y_1, \ldots, y_n) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \,.\, \text{mod}\, |C| \,.\, e^{-\frac{1}{2}y^t y}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \,.\, e^{-\frac{1}{2}y^t y} \qquad \text{(volgens (27))}$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, e^{-\frac{1}{2}y_j^2} \right\}$$

De verwachtingswaarde van de i-de component van $\underline{y}$ is dan:

(33) $$E\underline{y}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} y_i \prod_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, e^{-\frac{1}{2}y_j^2} \right\} dy_n \ldots dy_1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y_i \,.\, e^{-\frac{1}{2}y_i^2} \, dy_i \,.\, \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, e^{-\frac{1}{2}y_j^2} \, dy_j \right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y_i \,.\, e^{-\frac{1}{2}y_i^2} \, dy_i = 0.$$

Dus: $E\underline{y} = 0$, zodat (31) overgaat in:

(34) $$E\underline{x} = C \,.\, E\underline{y} + b = b.$$

De vektor b is dus weer precies de verwachtingswaarde van $\underline{x}$ en we zullen voortaan dan ook weer in plaats van b de griekse letter μ gebruiken: $E\underline{x} = \mu$.

Voor de vektor $\underline{x}$ hebben we nog geen analogon gedefinieerd voor de variantie σ^2 bij de normale verdeling van één stochastisch variabele. We doen dat nu.

Definitie 4:

Onder de covariantie-matrix van de vektor $\underline{x}$ verstaan we de matrix

$$(35)\qquad \sum = \text{cov}\,(\underline{x}, \underline{x}^t) = E\,(\underline{x} - \mu)(\underline{x} - \mu)^t = (E(\underline{x}_i - \mu_i)\,(\underline{x}_j - \mu_j)).$$

De hoofddiagonaal van deze matrix bestaat precies uit de varianties der $\underline{x}_i : E(\underline{x}_i - \mu_i)^2$. Buiten de hoofddiagonaal van deze symmetrische matrix vinden we de zogenaamde covarianties der $\underline{x}_i$ en $\underline{x}_j$:

$$(36)\qquad E(\underline{x}_i - \mu_i)\,(\underline{x}_j - \mu_j)$$

De covariantie matrix in ons geval $(\underline{x} - \mu = C\underline{y})$ is:

$$(37)\quad \sum = E(\underline{x} - \mu)\,(\underline{x} - \mu)^t = E(C\underline{y}\,.\,\underline{y}^tC^t) = C\,.\,E(\underline{y}\,.\,\underline{y}^t)\,.\,C^t$$

Het element in de i-de rij en j-de kolom van $E(\underline{y}\,.\,\underline{y}^t)$ is:

$$(38)\quad E(\underline{y}_i\,.\,\underline{y}_j) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} y_i\,.\,y_j\,.\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.\,e^{-\frac{1}{2}y_k^2}\right\} dy_n \ldots dy_1.$$

Berekenen we (38) nu eerst voor $i = j$ en vervolgens voor $i \neq j$, dan krijgen we:

$$(39)\quad E(\underline{y}_i^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_i^2\,e^{-\frac{1}{2}y_i^2}\,dy_i\,.\prod_{k=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}y_k^2}dy_k\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_i^2\,e^{-\frac{1}{2}y_i^2}\,dy_i = 1$$

(omdat $\int_{-\infty}^{\infty} y_i^2\,e^{-\frac{1}{2}y_i^2}\,dy_i = \sqrt{2\pi}$, zie (5)).

(Denk bij deze laatste gelijkheid ook aan de verwachtingswaarde van het kwadraat van een normaal verdeelde stochastiek $\underline{x}$ met $E\underline{x} = 0$ en $\sigma^2 = E\underline{x}^2 - (E\underline{x})^2 = E\underline{x}^2 = 1$.) en:

$$(40)\quad E(\underline{y}_i\,.\,\underline{y}_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_i\,e^{-\frac{1}{2}y_i^2}\,dy_i\,.\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_j\,e^{-\frac{1}{2}y_j^2}\,dy_j.$$

$$.\prod_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq j}}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y_k^2}\,dy_k\right\} = 0$$

(omdat $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = 0$, zie (4).)

Uit (39) en (40) vinden dus voor $E(\underline{y}\,.\,\underline{y}^t)$

(41) $$E(\underline{y}\,.\,\underline{y}^t) = I$$

Substitutie in (37) geeft:

(42) $$\Sigma = E(\underline{x} - \mu)\,(\underline{x} - \mu)^t = C\,.\,I\,.\,C^t = C\,.\,C^t.$$

Daar verder volgens (16) $C^t\,.\,A\,.\,C = I$ is:

(43) $$A = (C^t)^{-1}\,.\,C^{-1}$$

en dus:

(44) $$A^{-1} = C\,.\,C^t = \Sigma.$$

Daar A definiet positief is, is nu ook Σ definiet positief (vergelijk $\sigma > 0$).

We vinden tenslotte voor de kansdichtheidsfunktie f van een normaal verdeelde n-dimensionale stochastische vektor $\underline{x}$:

(45) $$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}\,|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\,.\,e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t\,\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

waarin $\mu = E\underline{x}$ en $\Sigma^{-1} = \{\text{cov}\,(\underline{x}, \underline{x}^t)\}^{-1}$ is.

Literatuur:

1. Syllabus *Heroriënteringscursus Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek*; Eindhoven, 1966.
2. Prof. Dr. H. Freudenthal, *Waarschijnlijkheid en Statistiek*.
3. T. W. Anderson, *An introduction to Multivariate Statistical Analysis*; London, 1958.
4. H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*; Princeton, 1963.

HET GETAL e.

De heer J. W. Perdeck-Amersfoort schrijft dat er voor π zulke aardige geheugensteuntjes zijn, die ons een aantal decimalen geven. Voor e kent hij er geen (wij ook niet). Daarom verzon hij zelf:

„Je behoort e foutloos te schrijven. 't Precieze is noodzaak voor
2, 7 1 8 2 8 1 8 2 8 4
grote rekenaars".
5 9

OVER DE BETEKENIS VAN DE NUMERIEKE ANALYSE IN HET ONDERWIJS AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL [1])

door

Prof. Dr. R. TIMMAN

Delft

In de laatste decennia heeft het gebruik van de wiskunde bij de behandeling van technische vraagstukken een grote verandering ondergaan.

Voor een goed begrip van deze verandering is het nodig allereerst een inzicht te krijgen in de positie die zij heeft ingenomen in de techniek. Zolang techniek de rol heeft gespeeld van op ervaring gebaseerde regels voor de te verrichten handelingen bij de produktie, dus nog in het stadium van het ambacht verkeerde, was de rol, die de wiskunde speelde vrijwel nihil. Eerst bij de geboorte van de technische wetenschap die als doel heeft een rationele fundering te geven van deze handelingen en daarmee een verhoging van de produktiviteit te verkrijgen, zien wij de wiskunde als taal voor deze rationele fundering te voorschijn komen. Ontwikkeld in nauwe samenhang met mechanica en fysica ligt het voor de hand, dat zij voornamelijk bij die onderwerpen uit de techniek naar voren kwam, die als toepassingen van mechanische en fysische relaties konden gelden.

Het onderwijs in de wiskunde aan de Technische Hogescholen in de periode, die aan de tweede wereldoorlog voorafging was hoofdzakelijk gericht op de functie, die zij vervulde in deze formulering van de grondvergelijkingen in deze vakken.

Deze taak was echter niet voldoende om in die jaren het belang van de wiskunde in het onderwijs te rechtvaardigen. Naast deze taak, die op zichzelf met een geringere omvang van het onderwijs ook uitgevoerd had kunnen worden, speelde de wiskunde een belangrijke rol in de vorming van de toekomstige ingenieur, zij nam aan de Technische Hogescholen de positie in, die de klassieke talen in vroegere eeuwen hadden ingenomen bij de vorming van het „denkend deel der natie".

---

[1]) Voordracht gehouden op verzoek van de stafraad van de Technische Hogeschool Delft voor de leden van het wetenschappelijk corps op 17 november 1966.

Immers, aan de problemen, die bij het wiskunde-onderwijs werden gesteld, kon men het vermogen om problemen te analyseren en oplossingen te vinden, oefenen.

Weliswaar zijn de echte technische problemen veel en veel gecompliceerder dan de wiskundige opgaven op de examens, het analyseren van gecompliceerde problemen wordt geleerd door eerst eenvoudige problemen te overmeesteren. Om deze redenen was het niet van zeer groot belang, welke onderdelen van de wiskunde deel uitmaakten van het programma.

Natuurlijk de analyse, die ook voor de mechanica belangrijk was, en de meetkunde, analytische, zowel als beschrijvende meetkunde. Omdat de vroegere ingenieur als technicus in de eerste plaats constructeur was, speelde de ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen en het uitvoeren van daarbij behorende berekeningen in zijn opleiding een dominerende rol, en om dat doel te bereiken ging het onderwijs ver uit boven het direct noodzakelijke.

Dit speelde des te meer omdat in die tijd het wiskunde-onderwijs tevens diende als selectiemethode die veronderstelde, dat degene, die het propedeutisch wiskunde-onderwijs met vrucht had kunnen volgen voldoende intellectuele capaciteiten bezat om als ingenieur te kunnen slagen.

In de jaren dertig kwam in deze situatie langzaam verandering. Vooral in de mechanica, de stromingsleer en de elektriciteitsleer begonnen wiskundige methoden voor de berekening van meer gecompliceerde vraagstukken reële toepassingen te vinden, een groot deel van de moderne methoden voor de oplossing van sterkteproblemen, trillingsberekeningen, aerodynamische berekeningen en warmtegeleidingsproblemen vonden hun grote ontwikkeling reeds in deze periode.

Geleidelijk aan drong het inzicht door dat een dieper en verdergaand onderwijs in de analyse voor een effectievere behandeling van deze problemen noodzakelijk was. Om deze reden heeft direct na de heropbouw van onze T.H. na 1945 de analyse met haar verschillende onderwerpen: functietheorie, laplace-transformaties, partiële differentiaalvergelijkingen, bijzondere functies het onderwijs gedomineerd.

In het bijzonder voor de ingenieur, die zich tot een zuiver wetenschappelijke carrière aangetrokken voelde, is dit onderwijs van groot belang geweest.

De hier geschetste analyse, die in principe weinig verschilt van het apparaat, dat traditioneel aan de Franse Ecole Polytechnique of aan de Engelse universiteiten werd gedoceerd, is in wezen klassiek

en levert een machtig apparaat om verschillende problemen uit de techniek op te lossen.

Men krijgt een duidelijke indruk van de mogelijkheden door het boek van Bateman: *Partial Differential equations of Mathematical Physics* door te lezen.

Men vindt daar hoofdstukken over gewone differentiaalvergelijkingen met toepassingen op buiging van staven, trillingsproblemen, theorie van elektrische netwerken, potentiaalstromingen, golfvoortplanting in continue media.

Van doorslaggevend belang waren randcondities, die gegeven waren voor lichamen van eenvoudige vorm. Vele tweedimensionale problemen, zoals stroming om cilinders, konden door conforme transformatie behandeld worden; voor driedimensionale problemen zocht men veelal coördinatensystemen, waarin de betrokken vergelijking (meestal verwant met de vergelijking van Laplace) separeerbaar was en waarbij het lichaam als een coördinaatoppervlak kon optreden. Het separeerbaar zijn van de vergelijking leidde tot een uitvoerige studie van de speciale functies, die ontstaan bij separeren van de golfvergelijking: functies van Bessel, Legendre en bij iets gecompliceerdere problemen de confluente hypergeometrische functies en tenslotte als bekroning de functies van de elliptische cilinder, bekend als functies van Mathieu. Oplossingen van de randwaardeproblemen werden veelal gezocht in de vorm van reeksen waarvan de termen bestonden uit produkten van deze functies die met behulp van tafelrekenmachines (jaren 50) en uitvoerige tabellen moeizaam werden berekend. Het onderzoek naar de convergentie van de reeksen leidde tot verlerlei moeilijke mathematische problemen.

Tijdafhankelijkheid kon meestal worden behandeld door middel van de transformatie van Laplace, waarbij de beginvoorwaarden automatisch hun plaats kregen in het resulterende randwaardenprobleem voor de uiteindelijke vergelijking.

Zeer vele fraaie analytische resultaten kwamen uit de gestelde problemen te voorschijn; het omzetten in getallen leverde vaak echter zeer grote moeilijkheden. Ieder die wel eens heeft geprobeerd om de zeer elegante methode van Schwartz-Cristoffel toe te passen op een andere figuur dan een rechthoek, weet hiervan mee te praten. De hier genoemde hoofdstukken uit de analyse domineerden het toepassingsgebied dermate, dat zij bekend stonden als de „toegepaste wiskunde". Voor vele problemen leverde deze toegepaste analyse geen remedie. Het is niet mogelijk om iedere differentiaalvergelijking, die de techniek levert, op te lossen met behulp van spe-

ciale functies. Een zeer oud voorbeeld is de berekening van de vorm die een vloeistofdruppel aanneemt onder invloed van zwaartekracht en oppervlaktespanning. Adams en Bashforth leverden in 1883 een oplossing van dit probleem door de differentiaalvergelijking te vervangen door een differentievergelijking en deze approximatief op te lossen.

Zij vermeldden niet hoeveel uren zij besteed hadden aan pogingen om een exacte oplossing van dit probleem te vinden. Ook de astronomen rekenden veel en pasten daarbij methoden van numerieke integratie toe. Een groot bezwaar van deze methoden was de enorme hoeveelheid rekenwerk die bijzonder vermoeiend was en geestdodend werkte. Uit deze tijd stamt de zinspreuk „Wo das Rechnen anfängt, da hört das Denken auf". Bij de introductie van elektrische tafelrekenmachines valt al direct een opbloei van de numerieke analyse waar te nemen.

Voortbouwend op klassiek werk konden verschillende methoden ontwikkeld worden: Adams, met modificaties, die een snellere convergentie waarborgde, zoals Milne en ook anderen.

Ook methoden zoals die van Newton en Newton-Bairstow voor het oplossen van algebraïsche vergelijkingen kwamen in zwang. Het werd nu ook mogelijk om trillingsproblemen met behulp van matrixmethoden te berekenen, kortom de numerieke analyse deed, zij het nog in bescheiden vorm haar intrede.

Oplossen van een groot aantal (20) lineaire vergelijkingen was nog steeds een flink probleem. De meest geschikte methode ging terug op Gauss, zij stond in de sterkteleer meer bekend onder de naam methode Cross.

In de eerste tijd van de introductie van rekenautomaten bestond het grote voordeel hieruit dat de genoemde methoden direct aangepast konden worden en dat de rekentijden aanzienlijk bekort konden worden.

De introductie van rekenautomaten had echter veel verdergaande gevolgen. Door de verhoging van de snelheden werd het mogelijk matrices van veel hogere orde (100 of meer) te behandelen.

Het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen wordt met rekenautomaten een eenvoudige zaak. Merkwaardig is, dat terwijl bij tafelrekenmachines extra- of interpolatiemethoden (Adams etc.) de voorkeur genoten boven methoden, die op een ontwikkeling in een taylorreeks gebaseerd waren (Runge, Kutta), dit bij rekenautomaten juist omgekeerd was.

De door de rekenautomaat geschapen mogelijkheid grote (lineaire) systemen te behandelen leidde tot de revolutionaire omwen-

teling, die in de inleiding is aangekondigd.

Het is veel efficiënter een functie van Bessel te tabuleren (in ieder interval) door oplossen van de differentiaalvergelijking dan door machtreeksontwikkeling. Grote systemen lineaire vergelijkingen worden zonder excessieve moeite opgelost. Had Kantorowich in 1939 reeds in verband met de Russische plan-economie een, wat wij nu noemen lineair programmeringsprobleem opgesteld, de in de oorlog door Dantzig ontwikkelde simplexmethoden ter oplossing van dit probleem leent zich voortreffelijk voor behandeling door een rekenautomaat.

In wezen komt het neer op het herhaald oplossen van lineaire systemen met modificaties. Hierdoor wordt het mogelijk lineaire systemen met 300 en meer variabelen te optimaliseren, zoals door bepaalde grote bedrijven inderdaad wordt gedaan. Het te optimaliseren object is dan de winstfunctie, de afhankelijkheid van de variabelen wordt lineair ondersteld.

Voor de techniek is van groot belang, dat het mogelijk wordt partiële differentiaalvergelijkingen numeriek op te lossen. De differentiaalquotiënten worden vervangen door differentievergelijkingen, de oplossingen worden bepaald door hun waarden in een groot aantal netpunten en de differentiaalvergelijking wordt teruggebracht tot een groot aantal lineaire vergelijkingen met evenveel onbekenden.

De matrix van deze systemen heeft een bijzonder prettige eigenschap: zij is grotendeels leeg.

In eerste instantie is er een zeer essentieel verschil tussen elliptische vergelijkingen (subsone stroming, vergelijkingen van de elasticiteitstheorie) parabolische vergelijkingen (warmtegeleiding, diffusie) en hyperbolische vergelijkingen (supersone stromingen, theorie van lange golven op ondiep water, plasticiteitstheorie).

De oplossingsmethoden van de bijbehorende lineaire vergelijkingen zijn voor de verschillende typen verschillend. Voor de elliptische zelf-geadjungeerde systemen kan de bijbehorende matrix symmetrisch worden gekozen. Wegens het grote aantal onbekenden en de accumulatie van afrondingsfouten is de methode van Gauss niet goed bruikbaar, en worden met vrucht iteratiemethoden ontwikkeld.

Evenzo worden voor de andere vergelijkingen steeds meer efficiënte methoden ontwikkeld, die het ook mogelijk maken om niet lineairiteiten of gevallen met niet constante coëfficiënten, die vroeger onoverkomelijke moeilijkheden boden, te lijf te gaan. Het is echter een misverstand om te denken, dat deze numerieke analyse

het karakter heeft van het „Rechnen, wo das Denken aufhört". Integendeel, het niet-denken wordt door de automaat gedaan, maar de methoden leveren talloze problemen van convergentie en, wat nog belangrijker is, stabiliteit.

Weliswaar is, als men een goede methode heeft, een numerieke berekening van een diffusieprobleem veel efficiënter dan een moeizame ontwikkeling in speciale functies, die ook weer berekend moeten worden en kan het geval van een diffusie-coëfficiënt, die van de concentratie afhangt nu ook meegenomen worden, het zoeken van de methode eist een grote mate van inzicht en scherpzinnigheid.

Het blijkt, dat numerieke methoden, die vroeger zeer effectief waren, met behulp van rekenautomaten aan belang verliezen. Een voorbeeld wordt geleverd door de methode van Ritz-Galerkin, die vroeger met relatief weinig moeite betrouwbare resultaten leverde. Een verbetering te krijgen vergelijkbaar met de resultaten van een redelijk fijne verdeling, eist echter veel meer moeite dan de directe berekening. Zoals aan alles, zijn echter ook aan de numerieke methoden grenzen gesteld.

In het gebied van golven met hoge frequentie levert, zoals te begrijpen is een netwerk-procedure zeker slechte resultaten en dit schijnt nog steeds een groot bezwaar te leveren. Ook is het gevaar niet denkbeeldig, dat door het relatieve gemak, waarmee grote hoeveelheden resultaten in de vorm van tabellen en grafieken worden verkregen, het inzicht in de beschouwde verschijnselen niet wordt gediend.

Dit is, op het ogenblik nog meer van belang, omdat een groot deel van het denkwerk (convergentie, stabiliteit), niet betrekking heeft op de fysische aard van het probleem, maar op de fouten die door de aard van de approximatie discretisering worden geïntroduceerd, zodat het geen additionele bijdrage levert tot inzicht in de fysische structuur van het probleem. Het is uitermate verheugend om resultaten te kunnen krijgen, die met klassieke methoden onbereikbaar zijn, maar dit betekent niet, dat analytische methoden weer geheel verdwijnen. Wel ligt het karakter geheel anders. Dit moge ik aan een voorbeeld toelichten. Enige jaren geleden is door een Amerikaans onderzoeker gerekend aan de ontmenging van zekere legeringen.

Bij verschillende waarden van een parameter bleek, dat de betrokken kromme over een groot deel van het gebied vrijwel horizontaal was, daarna wel veranderde en over een ander groot deel weer horizontaal liep.

Bij andere waarden vertoonde zich een oscillatie. De differen-

tiaalvergelijking was niet lineair en niet exact op te lossen. Het genoemde gedrag rechtvaardigde de veronderstelling, dat hier een asymptotische benadering voor kleine waarden van de betrokken parameter uitkomst zou bieden.

Door de asymptotische benadering werd de vergelijking aanzienlijk vereenvoudigd en leverde, in het ene geval oplossingen, die zich gedroegen als $e^{-x/\sqrt{\mu}}$ in het andere geval als $\sin x/\sqrt{\mu}$ zodat het gedrag van de numerieke oplossing goed voorspeld kon worden.

Hier wordt de rol van de analyse goed duidelijk. Indien het mogelijk is door asymptotische beschouwingen eenvoudige formules te verkrijgen, wordt het inzicht in de verschijnselen door analogie met de kennis, die wij van deze eenvoudige formules hebben, duidelijk verdiept. Tenslotte is geen enkele functie zo goed in staat een trilling te beschrijven als een sinus en geeft een e-macht catastrofale groei of geleidelijk uitsterven voortreffelijk weer!

Naast de behandeling van vraagstukken uit de fysica bieden echter de rekenautomaten talloze andere mogelijkheden. Lineair programmeren is al genoemd, andere optimiliseringstechnieken zoals dynamisch programmeren en zoek-technieken zijn alleen met behulp van rekenautomaten uitvoerbaar.

Wachttijdproblemen, waarvan de eenvoudigste typen door analytische behandeling met behulp van transformaties van Laplace behandeld kunnen worden, worden eenvoudig gesimuleerd. Dit levert resultaten op, die de klassieke methoden helemaal niet of alleen na zeer veel moeite opleveren.

Behalve deze problemen, die met het onderzoek samenhangen, zijn er toepassingen bij het ontwerp, het ontwikkelingswerk.

In een reclamebrochure van een automobielfirma, die dezer dagen in mijn brievenbus viel, lees ik dat de betrokken firma in Engeland een rekenautomaat ADA (niet eens zo bar duur) heeft aangeschaft die automobielen en onderdelen met onfeilbare precisie op een papierband „tekent". Het systeem is een belangrijke hulp voor de menselijke ontwerper, omdat het het saaie routinewerk overneemt en met grote snelheid en nauwgezetheid uitvoert.

Het berekenen van warmtewisselaars e.d. wordt al jaren lang door rekenmachineprogramma's uitgevoerd en juist hier is in de bedrijven het aantal toepassingen vooralsnog onuitputtelijk.

Na dit alles rijst de onontkoombare vraag: Hoe en in hoeverre moet het onderwijs in de wiskunde aangepast worden aan deze ingrijpende veranderingen? Voor de specialisten is deze vraag eenvoudig genoeg te beantwoorden. Iedere ingenieur, die wetenschappelijk onderzoek wil gaan doen, moet heden ten dage toegerust zijn

met een zekere kennis van numerieke analyse en moet in staat zijn een programma in een gangbare programmeertaal (ALGOL of FORTRAN) te schrijven.

De betrokken stof wordt in speciale colleges gedoceerd en het levert geen enkele moeilijkheid deze vakken als keuzevak of „verplicht vak" op te nemen.

Heel anders is de situatie in het onderwijs voor alle studenten voornamelijk in de propaedeuse. Immers, hier wordt bij de samenstelling van het programma om ieder uur gevochten en komt het totale programma tot stand door zorgvuldig afwegen. Het onderwerp is van dermate groot belang, dat er de nodige aandacht aan gewijd moet worden. Uit het voorafgaande is duidelijk, dat iedere ingenieur een redelijke kennis behoort te bezitten van numerieke methoden. Het komt nog dagelijks voor, dat een normaal afgestudeerd ingenieur in de mening verkeert, dat er 14 typen differentiaal vergelijkingen zijn, die geïntegreerd kunnen worden. Andere vergelijkingen „kunnen niet" en waarschijnlijk kent een hoogleraar in de wiskunde wel 140 typen, die hij kan integreren. Een dergelijke vraag jaagt diezelfde hoogleraar het schaamrood naar de kaken en doet hem vragen, wat hij toch wel heeft misdaan in zijn onderwijs dat deze opvattingen nog geen gemeen goed zijn! Een desideratum is dat de normale ingenieur in staat is integralen approximatief te berekenen met de trapeziumregel en de regel van Simpson, dat hij enig idee heeft van de fouten, die hierbij ontstaan. Verder behoort hij algebraïsche of transcendente vergelijkingen met de methode van Newton te kunnen oplossen en enig inzicht te hebben over approximatie van functies door polynomen, waarbij de aloude reeks van Taylor als eerste specimen kan dienen.

Naast deze minimumeisen komen numerieke methoden ter integratie van gewone differentiaalvergelijkingen, en enige ervaring met iteratieve methoden voor het vinden van eigenwaarden van matrices. Het is voorts gewenst, dat hij weet, hoe lineaire vergelijkingen worden opgelost en er zich wel van bewust is, dat de beroemde regel van Cramer wel de meest omslachtige methode is om dit te doen. Tenslotte kan men anno 1967 wel de eis stellen, dat hij in staat is voor eenvoudige gevallen zelf het programma en ALGOL of FORTRAN te schrijven.

Indien het gewicht van deze zaken bij de afdelingen dermate zwaar weegt, dat de bereidheid ontstaat om 1 college-uur in de propaedeuse hieraan op te offeren (men zal dat dan in het 2e jaar doen) is in ieder geval ervoor gezorgd, dat de betrokken kennis aanwezig is. Toch is dit op den duur geen bevredigende toestand. Didac-

tisch niet, omdat de numerieke methoden als iets anders, naast de gewone methoden worden geïntroduceerd en dus steeds een zeker odium behouden van een secundair alternatief.

Verder is het niet efficiënt, want de betrokken onderwerpen sluiten direct aan bij de stukken uit de analyse of de lineaire algebra waar zij betrekking op hebben. Het verdient daarom verre de voorkeur de genoemde onderwerpen te incorporeren in het normale onderwijs in de analyse en in de lineaire algebra. Dit stelt echter wel hoge eisen aan de docent en een nadere bezinning is nodig hoe dit dan wel moet gebeuren. Het doel wordt zeker niet bereikt, als men gewoon de thans heersende stof doceert en deze aanvult met de betrokken hoofdstukken. Afgezien van het feit, dat dan misschien de beschikbare tijd onvoldoende is, wordt een evenwichtige opbouw zeker niet bereikt. Het is en blijft steeds een moeilijke opgave om een 1e-jaars college analyse te geven: iedere docent legt een ander evenwicht aan tussen strengheid van bewijsvoering en bruikbaarheid van de bijgebrachte kennis. Als daar dan nog een derde vreemd element bijkomt wordt het resultaat nog onoverzichtelijker. Men kan een extreem standpunt innemen en alle begrippen uit de analyse (getallensysteem, limieten, differentiaalquotiënten etc.) definiëren op de wijze, waarop de getallen in de rekenmachine worden ingevoerd. Dit is een uitermate interessant experiment. Twee getallen zijn gelijk, als zij overeenstemmen in de binalen van een binaire voorstelling met 48 cijfers, er zijn slechts eindig veel getallen etc.

Dit systeem veronderstelt echter, dat het mogelijk is een analyse op te bouwen, die finitistisch is en praktisch evenveel presteert als de gewone analyse Bij mijn weten is een dergelijk systeem (nog) niet ontwikkeld en een strenge opbouw stuit op grote moeilijkheden. (Dit blijkt onmiddellijk, als men in dit systeem gaat delen, een matrix-inversie is nog veel moeilijker.)

Het is didactisch niet verantwoord om de analyse aan onze Hogeschool streng te introduceren; aan de andere kant kan men alleen dàn een verantwoorde niet-strenge behandeling geven als de strenge behandeling achter de hand is; men weet dan tenminste welke bewering wèl en welke niet gefundeerd is. Verder zal direct de eis gesteld worden dat de op deze wijze geïntroduceerde analyse tot dezelfde niet-numerieke behandeling van fysische en technische vraagstukken leidt, die nog steeds voor eenvoudig op te lossen problemen aangewezen is. Aangezien ook dit niet zo gemakkelijk is uit te voeren, vervalt dit systeem.

Het is echter goed mogelijk om een gezamenlijke opbouw van

de analyse en de numerieke analyse te geven waarbij beide elkaar steunen en dus het primair aangevoerde bezwaar van overbelasting van het programma direct wegvalt. Terwijl tot nu toe een ε-definitie van een limiet steeds een abstracte zaak bleef, die in de praktijk meestal niet te voorschijn kwam, ligt het nu voor de hand om direct met het invoeren van dit begrip een (zeer eenvoudig) programma te laten schrijven, waarbij de definitie daadwerkelijk wordt toegepast.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 2n + 3} = \tfrac{1}{2}$$

In normale taal:
Bereken voor $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$f(n) = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 2n + 3}$$

en stop hiermede, als $f(n) - \frac{1}{2} < \varepsilon$ bij gegeven ε, druk af n en $f(n)$ laat ε als parameter staan en voer het programma voor verschillende waarden van ε uit.

Het is duidelijk, dat dit het limiet-begrip duidelijk steunt en tegelijkertijd de student een numeriek proces bijbrengt.

Een ander voorbeeld: Steeds levert de stelling van Rolle een probleem op: Als $f(a) > 0$ en $f(b) < 0$ en $f(x)$ is continu, dan is er tenminste één x_0 tussen a en b, zodat $f(x_0) = 0$ is.

Ook hier wordt het bewijs veel concreter en daarmee gemakkelijk te verteren, indien het door een constructief bewijs wordt gesteund. Hiermee wordt dan ook direct een numeriek proces (niet het beste) voor het vinden van een nulpunt geleverd. Het is duidelijk, dat op deze wijze het zeer goed mogelijk wordt een bevredigende samensmelting van analyse en numerieke analyse te verkrijgen en merkwaardigerwijze wordt hierbij aan diegenen, die prijs stellen op een iets strengere behandeling in hoge mate tegemoetgekomen. Natuurlijk eist dat meer tijd, maar veel uit de oude stof kan vervallen. Het berekenen van ingewikkelde integralen met substitutiemethoden en partiaal breuksplitsing kan volledig vervallen. Alleen de z.g. standaardintegralen hebben nog betekenis. Van groot belang is de reeks van Taylor, waar zoals al vermeld, interpolatiepolynomen, direct bij kunnen aansluiten. Toch is de maatregel ingrijpend: de student leert al bij het begin om eenvoudige ALGOL of FORTRAN programma's te schrijven en dit wordt niet als iets bijzonders maar als iets gewoons geleerd en reeds in het begin wordt hij eraan gewend rekenmachines in te schakelen, zonder schade voor zijn in-

zicht in analyse. Ook voor de lineaire algebra is een dergelijke handelwijze direct uitvoerbaar.

Op deze wijze wordt dus het ene uur college, dat misschien aan de wiskunde toegevoegd zou moeten worden weer teruggegeven aan de technische vakken. Hierbij valt echter nog een belangrijke opmerking:

In het bovenstaande is reeds gesproken over het grote belang van nietnumerieke toepassingen van de rekenautomaten (tekeningen, automatische besturing etc.) dus van directe toepassing in technische processen. Nadat de student in het 1e jaar reeds door zijn programma's kennis heeft gemaakt met een machine is het met het oog op deze toepassingen onontkoombaar, dat hij enig inzicht krijgt in de machines zelf.

Voor het schrijven van ALGOL programma's is dit niet nodig, maar voor de hier genoemde toepassingen wel.

Het zou dus uitermate verstandig zijn om het vrijgekomen uur te besteden aan een college over rekenautomaten, waarmee dit inzicht in het normale programma wordt gegeven, zodat op dit gebied onze studenten althans enigszins uitgerust worden voor de taak, die hen de komende 20 jaren wacht.

BOEKBESPREKING

Wilhelm Magnus, Stanley Winkler: *Hill's Equation*, Interscience Publishers, 1966.

De naam differentiaalvergelijking van Hill is een afkorting voor homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde met reële, konstante coëfficiënten. Een standaardtype $y'' + Q(x)y = 0$, waarin Q een periodieke funktie is. Dit type vergelijkingen werd door Hill bestudeerd in verband met de astronomie- (maanbeweging), maar vindt thans vele toepassingen in de techniek (onder andere bij de frequentiemodulatie): een analoge ontwikkeling als bij de differentiaalvergelijking van Bessel. Het meest belangrijke facet van de vergelijking van Hill houdt verband met stabiliteits problemen. Een voorbeeld is de vergelijking van Matthieu $y'' + (\lambda + \theta \cos x)y = 0$, die de beweging van een trillend voorwerp beschrijft dat naar de evenwichtsstand getrokken wordt door een periodiek wisselende kracht. Voor $\theta = 0$ hebben we de gewone trillingsvergelijking met begrensde oplossingen. Voor welke waarden van λ en θ bestaan er stabiele (begrensde) oplossingen?

Het boek, dat een inleiding in dit type vergelijkingen is, bestaat uit twee delen deel I, algemene theorie (pagina 1-46) en deel II, details (pagina 47-119), de auteurs nemen zich voor nog een uitvoering overzicht over de bestaande litteratuur te publiceren.

F. van der Blij

KLASSISCHE UND MODERNE AXIOMATIK [1]

von

B. L. van der Waerden

(Zürich)

I

Diskussionen über die Rolle der Axiomatik im Schulunterricht werden nach meiner Erfahrung sehr erschwert durch häufig auftretende Missverständnisse. Es gibt zwei Arten von Axiomsystemen, die didaktisch völlig verschiedene Funktionen erfüllen und zwischen denen man gleich am Anfang der Diskussion sauber unterscheiden sollte.

Die eine Art will ich *klassische Axiomatik* nennen. Sie wurde von Eukleides in seinen „Elementen" und von Newton in seinem Hauptwerk „Principia" verwendet. Zwei Merkmale sind für diese klassische Axiomatik charakteristisch:

1. Die Gegenstände, auf die sich die klassischen Axiome beziehen, sind von vornherein bestimmt und bekannt. Bei Eukleides sind es Figuren im Raum, bei Newton bewegende Körper, die Kräfte aufeinander ausüben.

Die Frage, ob diese Gegenstände als sichtbar und greifbar oder als idealisierte Gegenstände aufzufassen sind, lassen wir lieber beiseite, weil sie in unseren beiden Standardbeispielen verschieden zu beantworten ist. Für Platon und die griechischen Mathematiker ist ein Punkt ein idealer Gegenstand, der „keine Teile hat", während greifbare Objekte immer Teile haben. Newton dagegen redet von materiellen Körpern; er wendet seine Axiome ja nachher auf die Erde, den Mond und die Planeten an. Allerdings betrachtet Newton auch punktförmige Körper.

Worauf es ankommt, ist vielmehr, dass bei Newton wie bei Euklid nicht von irgend welchen abstrakten „Räumen" die Rede ist, sondern nur von *dem Raum*, und dass *der Raum* mit allen seinen Punkten, Geraden u.s.w. von Anfang an, d.h. noch bevor die Axiome aufgestellt werden, beim Leser als bekannt angenommen wird.

---

[1]) Overgenomen uit: Elemente der Mathematik, Basel: jaargang 22, nr. 1, 1967; p. 1—24.

Genau das ist auch die Situation, von der wir beim Schulunterricht auszugehen haben. Der Schüler kann sich Punkte, Geraden, Kugeln u.s.w. vorstellen: sonst würde er den Geometrieunterricht überhaupt nicht verstehen. Diese vorhandenen Vorstellungen werden vom Lehrer vielleicht noch etwas präzisiert, indem er erklärt, dass ein Punkt nicht etwa ein ausgedehnter Kreideklecks ist und dass man sich eine Gerade nicht als begrenzte Strecke, sondern nach beiden Seiten unendlich vorzustellen hat. Von „Räumen" im modernen, abstrakten Sinn kann der Lehrer, wenn überhaupt, erst in einem viel späteren Stadium reden.

2. Das zweite Merkmal der klassischen Axiomatik ist, dass derjenige, der die Axiome aufstellt, sie für wahr hält. Newton hielt die Mechanik des Aristoteles für falsch und die eigene für richtig. Die Griechen haben die Sätze der Euklidischen Geometrie in Verbindung mit der Hypothese, dass Lichtstrahlen und Sehstrahlen geradlinig sind, unbedenklich auf Probleme der Optik, Astronomie und Mechanik angewandt; sie hielten jene Sätze offenbar für richtig. Auch wir halten die Newtonsche Mechanik in Verbindung mit der Euklidischen Geometrie in einer für alle praktischen Anwendungen genügenden Genauigkeit für richtig; wir können also mit gutem Gewissen die Sätze der Geometrie und Mechanik unseren Schülern als wahre Aussagen anbieten. Das heisst: Wir können, wenn wir wollen, uns auf den Standpunkt der klassischen Axiomatik stellen.

Die *moderne Axiomatik* unterscheidet sich von der klassischen dadurch, dass die Gegenstände, von denen die Rede ist, beliebig gewählt werden können, sofern sie nur die Axiome erfüllen. Jede Struktur, die die Gruppenaxiome erfüllt, ist eine Gruppe. Die Gegenstände der Axiomatik sind, wie man sagt, durch die Axiome „implizit definiert". Die Frage nach der „Wahrheit" der Axiome hat in der modernen Axiomatik keinen Sinn. Es kann Gegenstände geben, für welche die Axiome zutreffen; dann treffen für eben diese Gegenstände auch alle Folgerungen zu. Die Axiome sind keine echten Aussagen, deren Richtigkeit vom Autor behauptet wird, sondern das ganze Axiomsystem ist nur ein Teil einer Definition: Wenn diese Axiome erfüllt sind, so nennen wir die vorliegende Struktur eine Gruppe oder eine euklidische Geometrie, etc.

Das bisher gesagte ist natürlich allgemein bekannt; es musste aber noch einmal gesagt werden, weil die meisten heutigen Mathematiker beim Wort „Axiomatik" nur an die moderne Axiomatik denken. Dass der klassische Standpunkt auch möglich ist und dass es unter Umständen didaktisch richtig sein könnte, sich in der Schule bewusst und ausdrücklich auf den klassischen Standpunkt

zu stellen, daran denkt man nicht, und das führt zu den vorhin erwähnten Missverständnissen.

In einer klassischen Axiomatik braucht man nicht alles, was man als bekannt voraussetzt, ausdrücklich als Axiom zu formulieren. Man kann sehr vieles, was man für selbstverständlich oder bekannt hält, stillschweigend benutzen. Eukleides und Newton haben das beide ausgiebig getan. Auch im Schulunterricht in Geometrie scheint es mir vernünftig, alles das, was anschaulich klar ist, ausdrücklich oder stillschweigend anzunehmen und nicht zu beweisen. Dass z.B. eine Seite AB eines Dreiecks kleiner ist als die Summe $AC + CB$, ist klar, denn von A über C nach B ist ein Umweg.

Welche Grundvoraussetzungen man ausdrücklich als Axiome formuliert und welche man stillschweigend annimmt, das ist in der klassischen Axiomatik eine rein didaktische Frage, über die man verschiedener Meinung sein kann. Auf ein Axiom mehr oder weniger kommt es nicht an.

Ganz anders in der modernen Axiomatik. Hier muss man alle Schlussfolgerungen rein logisch aus den Axiomen allein entwickeln. Nichts darf der Anschauung entnommen werden. Man darf in der Regel kein Axiom weglassen und keines hinzufügen.

Die Wasserscheide zwischen der klassischen und der modernen Axiomatik verläuft zwischen Pasch und Hilbert. Pasch hat ein Axiomsystem im klassischen Sinne aufgestellt. Seine Objekte waren Punkte, Geraden und Ebenen im Anschauungsraum, aber er hat alle Voraussetzungen, auf denen seine Geometrie beruhte, ausdrücklich formuliert und alle Beweise rein logisch geführt. Das hat es Hilbert ermöglicht, den Sinn der Axiome anders zu interpretieren. Hilberts Punkte, Geraden und Ebenen sind irgend drei Klassen von Objekten, die die Axiome erfüllen.

Durch Hilberts Geniestreich waren alle erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten, die von jeher mit den geometrischen Grundbegriffen und Axiomen verbunden waren, mit einem Schlage aus der Welt geschafft. Allerdings nur aus der Welt des reinen Mathematikers, denn sobald man die Geometrie auf Planeten oder Maschinen anwendet, stellen sich die erkenntnistheoretischen Probleme von neuem.

Die klassische und die moderne Axiomatik verfolgen ganz verschiedene Ziele. Die klassische Axiomatik ist vor allem ein didaktisches Hilfsmittel. Ihr Ziel ist, eine Theorie so darzustellen, dass einige oder alle Grundvoraussetzungen klar herausgestellt werden und dass die Lehrsätze in überzeugender Weise aus diesen Grund-

voraussetzungen hergeleitet werden. Besonders bei physikalischen Theorien hat diese Expositionsmethode grosse Vorteile, aber auch in der Geometrie hat sie sich gut bewährt. Mehr als zwei Jahrtausende lang hat die Menschheit aus den Elementen des Eukleides Geometrie gelernt.

Die moderne Axiomatik hat ein ganz anderes Ziel. Sie wurde zunächst dazu geschaffen, Fragen wie die der Widerspruchslosigkeit und der Unabhängigkeit von Axiomen zu untersuchen. Ferner dient sie dazu, verschiedene mathematische Theorien einheitlich zusammenzufassen und zu verallgemeinern. Ein Satz, wie der von Jordan-Hölder, der aus den Gruppenaxiomen allein hergeleitet wird, gilt für alle Gruppen und kann in den verschiedensten Gebieten angewandt werden.

II

Was folgt nun daraus für den Schulunterricht?

Zunächst müssen wir zwei Fragen vollständig voneinander trennen:

A. Soll man beim Elementarunterricht in der Geometrie die traditionelle Methode der klassischen Axiomatik beibehalten, modifizieren oder abschaffen?

B. Soll man ein Stück moderne Axiomatik, etwa der Gruppen, in der Schule behandeln?

Die zwei Fragen sind meines Erachtens völlig unabhängig. Mann kann A bejahen oder verneinen, und unabhängig davon kann man B bejahen oder verneinen. Die klassische und die moderne Axiomatik verfolgen ja ganz verschiedene Ziele.

Die zwei Fragen werden manchmal miteinander vermischt. Wenn ich das Gespräch auf die Frage A bringe, die mir sehr am Herzen liegt, so erhalte ich häufig eine Antwort wie die folgende: „Die Axiomatik der Elementargeometrie ist so kompliziert, sie braucht so furchtbar viele Axiome. Könnte man nicht besser ein einfacheres Axiomsystem, etwa die Gruppenaxiome, in der Schule behandeln?"

Meine Antwort wird nach dem vorigen klar sein. Die Axiomatik der Elementargeometrie ist nur dann kompliziert, wenn man sich vornimmt, alle benutzten Voraussetzungen ausdrücklich als Axiome zu formulieren und alle Folgerungen rein logisch aus den Axiomen zu beweisen. Das aber wird kein vernünftiger Lehrer tun. Und zweitens: Die Frage, ob man ein einfaches modernes Axiomsystem in der Schule behandeln soll, hat mit der Frage des Geometrie-

unterrichts in den unteren Klassen überhaupt nichts zu tun.

Behandeln wir also beide Fragen getrennt.

A. Die axiomatische Methode (im klassischen Sinn, ohne vollständige Formulierung aller Grundannahmen und ohne vollständige Beweise) hat sich didaktisch seit Euklid sehr gut bewährt. Warum sollte man sie verlassen? Wohl kann ich mir verschiedene Verbesserungen denken. Statt Beweise mit den Kongruenzsätzen zu führen, könnte man Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen verwenden. Beweise von anschaulich klaren Sätzen könnte man weglassen. In der Stereometrie, wo die Anschauung der Schüler und Schülerinnen manchmal versagt, könnte man mehr Axiome einführen und mehr logische Beweise erbringen.

Vielleicht ist es didaktisch richtig, mit Axiomen über die Addition von Vektoren anzufangen, wie Dieudonné und Papy es vorgeschlagen haben. Ich verfüge nicht über Erfahrungen mit dieser Methode und kann daher kein Urteil fällen.

Jedenfalls halte ich es für höchst wichtig, dass die Schüler wenigstens ein Beispiel eines Axiomsystems im klassischen Sinn in der Schule kennen lernen. Die Erkenntnis, dass exakte Wissenschaften, wie die Geometrie und die Mechanik, von gewissen Voraussetzungen ausgehen, die ihrerseits nicht bewiesen, sondern einfach angenommen werden, ist von grösster Wichtigkeit, nicht nur für diejenigen, die später Naturwissenschaftler oder Philosophen werden, sondern für alle gebildeten Menschen. Spinoza war von dieser Erkenntnis so beeindruckt, dass er seine Ethik „more geometrico" axiomatisch aufgebaut hat.

Die Bedeutung des Wortes „Axiom" sollte jeder gebildete Mensch kennen. Ich meine hier nicht die moderne, sondern die klassische Bedeutung. Die moderne Bedeutung ist nur für Mathematiker interessant und philosophisch ganz unerheblich, da ein Axiom ja nur ein Teil einer Definition ist; aber die klassische Bedeutung ist in den philosophischen Sprachgebrauch und in den des täglichen Lebens übergegangen. Wenn ein Politiker sagt: „Für mich ist es ein Axiom, dass . . ." oder wenn er sagt „Mein Gegner geht offenbar von dem Axiom aus, dass . . .", so hat das Wort Axiom die klassische Bedeutung. Ein Axiom ist etwas, das man für wahr hält, aber nicht beweist.

Damit ist, wie mir scheint, das Beibehalten der klassisch-axiomatischen Methode in der Elementargeometrie genügend begründet.

Nun zur Frage B. Ich habe schon erwähnt, dass die moderne Axiomatik erkenntnistheoretisch uninteressant ist, da ein Axiom-

system im modernen Sinn einer Nominaldefinition gleichkommt. Ich sehe auch nicht ein, wieso eine axiomatische Behandlung eines Teiles des üblichen Schulstoffes zu einer Vereinheitlichung oder zu einem besseren Verständnis führen könnte. Wahrscheinlich ist es didaktisch möglich, die Aufstellung eines einfachen Axiomsystems den Schülern mundgerecht zu machen und sie zu veranlassen, einfache Folgerungen aus den Axiomen zu ziehen, aber wozu? Zu den Hauptzielen des Mathematikunterrichtes in der Schule gehört wohl die Einführung in das exakt-wissenschaftliche Denken, aber nicht die Einführung in eine spezifisch-mathematische Denkweise, die den modernen Mathematikern eigentümlich ist.

BOEKBESPREKING

László Fuchs, *Teilweise geordnete algebraische Strukturen* (Studia Mathematica, Band 19, Vandenhoeck und Ruprecht, Gottingen, 311 Seiten, 1966, 45 DM.

Deze Duitse uitgave is een vertaling van het in 1961 verschenen boek ,,Partially ordered algebraic systems". Het boek is in drie delen verdeeld, waarin resp. partieel geordende groepen, partieel geordende ringen en lichamen, en partieel geordende halfgroepen behandeld worden. Een partieel geordende groep is een groep, die tevens een partieel geordende verzameling is, en wel zodanig dat de groepsstructuur en de ordeningsstructuur aan elkaar aangepast zijn (d.w.z. uit $a \leqq b$ volgt $ac \leqq bc$ en $ca \leqq cb$ voor elk element c van de groep). Analoog voor ringen, lichamen en halfgroepen.

Het is hier niet de plaats om op bijzonderheden in te gaan; vermeld zij slechts dat het interessant is om te zien welke merkwaardige overeenkomsten (en verschillen) er bestaan tussen de structuur van een partieel geordende (additieve) groep en die van een ring (de ordeningsstructuur neemt de taak van de multiplicatieve structuur gedeeltelijk over). Van belang is het bijzondere geval dat de groep een abelse groep is, die ten opzichte van de partiële ordening een rooster (lattice; Verband; treillis) is. Zoals de schrijver in zijn voorwoord opmerkt, heeft hij echter slechts weinig aandacht kunnen schenken aan de vooral in de laatste jaren zo in omvang gegroeide theorie van de vectorroosters (vector lattices; espaces de Riesz). Tenslotte zij vermeld dat deze Duitse uitgave op verscheidene punten meer materiaal bevat dan de oorspronkelijke uitgave; het was echter niet mogelijk alle nieuwe resultaten op het besproken gebied reeds nu in het boek te verwerken.

A. C. Zaanen

D. C. Murdock, *Analytic Geometry* with an introduction to vectors and matrices, John Wiley and Sons Ltd., Londen, 1966, 290 blz., 53/—.

De verdienste van dit leerboek is wel de juiste dosering van de ,,klassieke" behandeling van de analytische meetkunde met de lineaire algebra. De bespreking in de twee- en driedimensionale ruimte is daarvan een noodzakelijk en gelukkig gevolg. Vanuit een normale opzet, wordt de overgang naar de lineaire algebra haast vanzelfsprekend. De schrijver ziet kans, geleidelijk van de formele invoering van matrices, vectoren en determinanten tot een strenge behandeling van deze onder-

werpen te komen. De vele, niet te opzettelijk gekozen voorbeelden, dwingen haast tot de invoering van deze methode.

Bij het invoeren van transformaties, worden direct al „alibi" en „alias" transformaties onderscheiden. De eerste, waarbij het assenstelsel behouden blijft, de tweede waarbij het assenstelsel vervangen wordt door een ander.

Vectoren zijn gewenst bij translaties, het „dot" produkt bij de hoek van vectoren, het „cross" produkt bij het bepalen van de richtingsvector van de snijlijn van twee vlakken m.b.v. de normaalvectoren, het „box" produkt bij het bepalen van de inhoud van een parallellepipedum.

Een enkele keer zou men iets verder willen gaan. Zo worden de vergelijkingen van lijnen wel in parametervorm gegeven, maar de stap naar de vectorvergelijking $x = a + \lambda b$ ontbreekt. Ook de „cirkelvergelijking": $(x \,.\, x) + 2(p \,.\, x) + a = 0$ zou wegens zijn algemeen karakter kunnen zijn opgenomen.

Een aardige toepassing van ongelijkheden vindt men in hoofdstuk 5.4, waarin problemen (van praktische aard) worden besproken die tot een lineair program kunnen worden herleid, waarbij wordt aangetoond dat een dergelijk systeem altijd voert tot een convexe verzameling van punten.

Hoofdstuk 7 behandelt de kegelsneden in R_2 en de kwadrieken in R_3 met duidelijke voorbeelden en figuren.

Het oefenmateriaal is eenvoudig op de man af en het betoog wordt nooit onderbroken door delen ervan in de opgaven op te nemen.

Een punt wordt als rijvector opgevat. Dan volgt de behandeling van de lineaire vectorruimten (afhankelijkheid, dimensie, basis). De rotaties in R_2 worden als orthogonale transformaties gezien, waarbij orthonormale bases overgaan in orthonormale bases. Nu is het nodig meer uitvoerig in te gaan op de matrix-algebra en determinanten.

Een stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden kan dus geschreven worden als een matrixvergelijking, $AX^T = B^T$ waarin A de coëfficiëntenmatrix, X^T en B^T getransformeerde rijvectoren d.w.z. kolomvectoren zijn.

Een (reële) orthogonale transformatie P voldoet dan aan:
$P^T \,.\, P = I$, det $P = 1$ en met P zijn dan P^T en P^{-1} orthogonaal, met P en Q orthogonaal, ook $P \,.\, Q$ orthogonaal.

Na rotaties en spiegelingen volgt dan de behandeling van kwadratische vormen m.b.v. de notatie XAX^T, waarbij A de (symmetrische) coëfficiëntenmatrix is van de kwadratische vorm. Deze kan dan door een reële orthogonale transformatie P omgezet worden in $\Psi D \Psi^T$ waarbij D een diagonaalmatrix is. Dit leidt dan tot de karakteristieke matrix waarvan de determinant de karakteristieke vergelijking is, de wortels de eigenwaarden en de bijbehorende vectoren de eigenvectoren van de transformatie zijn.

Het boek besluit met een hoofdstuk over de complexe getallen. Een prettig studieboek, dat niet te hoge eisen stelt aan belangstellenden.

Burgers

Wimecos

De penningmeester van Wimecos maakt de leden er op attent, dat het un reeds mogelijk is hun contributie voor het verenigingsjaar 1967—1968 ten bedrage van f 9.— (inclusief abonnement op Euclides) te storten of over te maken op postrekening 143917 ten name van Wimecos, Amsterdam. Leden die Euclides op andere wijze ontvangen betalen een contributie van f 3,50.

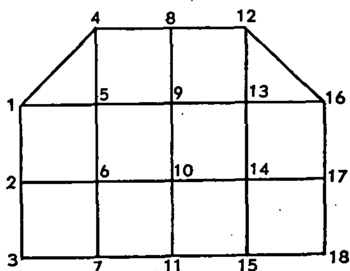
RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

179. Op bijgaand bord bevindt zich een „wolf" en een „schaap". Beide wandelen langs de aangegeven wegen. Uiteraard tracht de wolf het schaap te vangen en het schaap de wolf te ontkomen. Om beurten wandelen ze van een snijpunt naar een aanliggend. De wolf bevindt zich bij het begin in punt 9 en het schaap in punt 11. De wolf begint. Zodra de wolf een punt bereikt, waar het schaap zich bevindt, zal hij het verslinden. Wat is voor beide de beste speelwijze? Hoe is de afloop van het spel?

Zelfde vraag, als de begintoestand is: wolf in punt 11 en schaap in punt 9.

(B. Kootstra)



180. Elk veelvlak kunnen we karakteriseren door de hoekpunten op te noemen en de volgorde op te geven, waarin zij in de zijvlakken voorkomen. Zo kan op deze manier een kubus $ABCD.EFGH$ gerepresenteerd worden door

$$(ABCD)\ (EFGH)\ (ABFE)\ (BCGF)\ (CDHG)\ (DAEH).$$

De rangschikking van de hoekpunten van elk zijvlak is cyclisch; de richting, waarin de cykel doorlopen wordt, is irrelevant.

Een dergelijke representatie heeft de volgende eigenschappen:

a. twee cykels hebben maximaal twee elementen gemeen,

b. als twee cykels twee elementen gemeen hebben, zijn deze elementen in beide cykels aangrenzend,

c. elk paar aangrenzende elementen van een cykel komt in precies één andere cykel voor,

d. elke cykel bevat minimaal drie elementen.

Is nu elk stel cykels, dat vodoet aan de eisen a, b, c en d, representatie van een veelvlak?

OPLOSSINGEN

177. a. Vijf personen spelen bridgeronden, waarbij ieder met ieder eenmaal speelt en ieder tegen ieder tweemaal. Op hoeveel verschillende manieren is dit mogelijk?

b. Dezelfde vraag voor zes personen.

a. Er is slechts één manier mogelijk, nl.

12–34
13–25
14–35
15–24
23–45

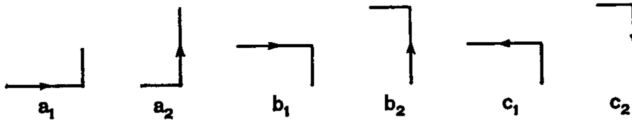
Toelichting. Men kan beginnen 12, 13, 14, 15, 23 en 45 op te schrijven. Nu zal 12 spelen tegen 34 of 35. Totnogtoe zijn 4 en 5 verwisselbaar, zodat we zonder de algemeenheid te schaden aan mogen nemen, dat 12 speelt tegen 34. Dan kunnen 25, 35 en 24 nog slechts op één manier geplaatst worden.

b. Er zijn nu $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ paren te vormen. Elk paar speelt eenmaal, maar bij elk spel spelen twee paren tegelijk. Zodat er $\frac{15}{2}$ keer gespeeld moet worden. Omdat dit geen geheel getal is, is nu dus geen oplossing mogelijk.

178. a. In minimaal hoeveel paardesprongen is op een onbegrensd „schaakbord" vanuit veld (0, 0) veld (17, 17) bereikbaar en langs hoeveel verschillende wegen?

b. Dezelfde vraag voor een echt schaakbord, als uitgaande van het veld links onder het veld rechts boven bereikt moet worden.

a. Er zijn zes verschillende soorten paardesprongen die in aanmerking komen, nl.



Bij de sprongen a_1 en a_2 neemt de som van de coördinaten van het veld 3 toe, bij b_1 en b_2 neemt de som 1 toe en bij c_1 en c_2 neemt de som 1 af. De som moet 34 toenemen. Vereist zijn dus minimaal 12 sprongen, en wel 11 van de soort a_1 of a_2 en 1 van de soort b_1 of b_2.

Onderstel er worden uitgevoerd x sprongen van de soort a_1, $11 - x$ van de soort a_2 en 1 van de soort b_1. Dan moet

$$2x + (11 - x) + 2 = 17$$

en dus $x = 4$. Uitgevoerd worden dus 4 sprongen van de soort a_1, 7 van de soort a_2 en 1 van de soort b_1.

De volgorde hiervan kan willekeurig gekozen worden. Dit kan op

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{7} = 3960 \text{ manieren.}$$

Evenzo vinden we 3960 manieren, waarbij b_2 in plaats van b_1 uitgevoerd wordt. In totaal dus 7920 manieren.

b. Het kleinste aantal sprongen is nu 6. De mogelijke wegen bestaan uit:

$4a_1 + 1a_2 + 1c_1$; aantal manieren $6 \times 5 = 30$,

ten minste, als we vergeten aan de rand te denken. We moeten hiervan dus nog aftrekken het aantal wegen, waarbij de rand overschreden wordt, t.w.

beginnend met c_1 of met a_2c_1 $5 + 1$ manieren,

eindigend op c_1 of op c_1a_2 $5 + 1$ manieren,

zodat overblijven $30 - 12 = 18$ manieren.

Ook kunnen wegen bestaan uit:

$1a_1 + 4a_2 + 1c_2$; aantal manieren analoog 18.

En tenslotte nog uit:

$2a_1 + 2a_2 + 1b_1 + 1b_2$, waarbij de b_1 en de b_2 niet aan het begin en niet aan het eind mogen voorkomen. Dit kan op $4 \cdot 3 \cdot \binom{4}{2} = 72$ manieren.

In totaal zijn dus 108 verschillende wegen mogelijk.

Opmerking. Degenen, die lust hebben, kunnen een analoge opgave met koningszetten in plaats van paardesprongen proberen, b.v. van (0, 4) naar (7, 3).